Absurde Mathematik

Anoushirvan Dehghani

4. Dezember 2007

Zusammenfassung. *Ein kleiner Streifzug durch die etwas absurderen und paradoxen Seiten der Mathematik. Es werden Beweise gezeigt, die der menschlichen Intuition oder einfach nur sich selbst widersprechen. Wo es möglich ist, sollen die Paradoxa auch aufgelöst werden.*

1 Gabriels Horn

Ein seit der Neuzeit bekanntes mathematisches Paradoxon ist *Gabriels Horn*. Nach seinem Entdecker Evangelista Torricelli [1] wird es auch *Toricellis Trompete* genannt.

Es handelt sich dabei um der in Abb. 1 gezeigten Rotationskörper, der durch eine Drehung des Graphen von $y = \frac{1}{x}$ für alle $x \geq 1$ um die x-Achse erzeugt wird.

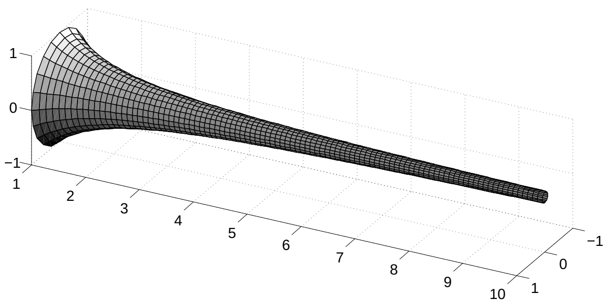

Abbildung 1: Anfangsverlauf von Gabriels Horn

Dieser recht simpel aussehende Körper hat eine seltsame Eigenschaft. Die Berechnung seines Volumens ergibt einen endlichen Wert:

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi[0-(-1)] = \pi \quad (1)$$

Anders hingegen sieht es aus, wenn die Oberfläche bestimmt werden soll:

$$A = \int_1^\infty 2\pi y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\geq 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[\ln(x)\right]_1^\infty = \infty \quad (2)$$

Dieser Körper hat also eine unendlich große und dennoch glatte Oberfläche[2], jedoch ein nur endlich großes Volumen! Anschaulich gesagt: Entspricht eine Maßeinheit $10\ \mathrm{cm}$, so reichen etwas mehr als drei Liter Farbe aus, um das Horn komplett zu füllen. Jedoch würde sich niemals genug Farbe finden, um die $\infty\ \mathrm{qm}$ große Oberfläche anzustreichen - und dies, obwohl das Horn doch bereits komplett mit Farbe gefüllt ist!

Die Erklärung dieses Paradoxons liegt an den unterschiedlichen Dimensionen der Oberfläche und des Volumens. Die Integration eines Rotationskörpers kann als stückweise Addition kurzer zweidimensionaler Ring- bzw. dreidimensionaler Scheibchensegmente angenähert werden. Deren Radius entspricht dabei jeweils dem momentanen Funktionswert von $y = \frac{1}{x}$.

Werden diese Segmente infinitesimal kurz gehalten, so ergeben sich eindimensionale Ringstreifen bzw. zweidimensionale Kreise. Wächst nun x über alle Grenzen, so gilt:

$$2\pi\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x} \gg \pi\frac{\pi}{x^2} \qquad \text{für} \quad x\to\infty \quad (3)$$

Das wachsende x geht also nur reziprok linear in die Größe der Ringstreifen ein, während es für die Fläche der Kreise zu einem quadratischen Absinken führt. Dies führt einerseits zu dem existierenden Grenzwert π, andererseits zu dem unbegrenzten Wachstum der Oberfläche.

Die praktische Durchführung eines „Befüll-Experimentes“ scheitert daran, dass die Herstellung eines solchen, unendlich langen Objektes nicht so recht gelingen mag. Unabhängig davon wäre ab einer bestimmten Länge der Horndurchmesser so klein, dass nicht mal mehr ein einziges Molekül oder Atom der verwendeten Füllsubstanz hineinpassen würde.

Merke: Zweidimensionale Oberflächen im dreidimensionalen Raum sind nicht ohne weiteres mit dreidimensionalen Volumina zu vergleichen!

[1] * 15. Oktober 1608 in Faenza, IT; † 25. Oktober 1647 in Florenz, IT.

[2] „glatt“ bedeutet hier, dass es nicht um eine fraktale Oberfläche oder ähnliche Taschenspielertricks geht.

2 Efrons intransitive Würfel

Der gesunde Menschenverstand sagt: *Wenn der Porsche meist schneller ist als der Audi, und der Ferrari meist schneller als der Porsche, so wird der Ferrari in der Regel auch den Audi schlagen.* Der Mathematiker spricht hier von einem *transitiven Vorteil*. Dass dies bei einem Glücksspiel mit fairen Würfeln nicht gelten muß, erscheint absurd - und dennoch ist es so!

Die erste Person, die einen Satz solch intransitiver Würfel vorgestellt hat, war Bradley Efron[3]. Die Belegung ist in Abb. 2 dargestellt. *Fair* bedeutet, dass jede Seite eines Würfels die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{6}$ besitzt. Seltsam dabei: Spieler 1 darf sich einen beliebigen die-

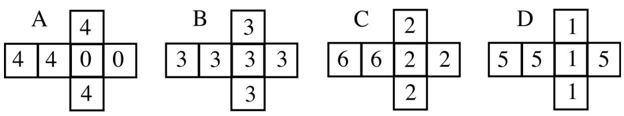

Abbildung 2: Efrons Würfel

ser vier Würfel aussuchen. Spieler 2 kann nun *immer* einen der verbleibenden Würfen so auswählen, dass sein Würfel den von Spieler 1 im statistischen Mittel schlägt. Mathematisch formuliert gilt:

$$\begin{aligned} P(A > B) &= P(B > C) = P(C > D) \\ &= P(D > A) = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (4)$$

Wird der Wettstreit beispielsweise über zehn Runden gespielt, so gewinnt A über B mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit. Genauso B über C. Und C über D. Und D über A - womit das Bild eines Treppenhauses im Stile von Escher[4] vor Augen rückt.

Wie kommt dieses Phänomen zustande? Die Betrachtung der Erwartungswerte, also der statistischen Mittelwerte, bringt keinen Hinweis: $E[A] = \frac{16}{6}$, $E[B] = 3$, $E[C] = \frac{20}{6}$, $E[C] = 3$. Aufschlussreicher ist dagegen ein Blick auf die *bedingten Wahrscheinlichkeiten*. Bei diesem direkten Vergleich zeigt sich, dass die Abstufungen der Würfel genau so gewählt sind, dass sie jeweils ihren „Vorgänger“ gerade eben mit $p = \frac{2}{3}$ schlagen - unter minimalem Einsatz der Mittel, also der Augen auf den Seiten. Anders formuliert: Jeder Würfel ist genau so „eingestimmt“, dass er im Vergleich zu seinem unterlegenen Widerpart in 24 von 36 Fällen überlegen ist. Die dazu verwendeten Ziffern sind dabei so gewählt, dass sich der genannte „Kreislauf“ bilden kann - und damit zu jedem Würfel ein überlegener existiert.

Mittlerweile gibt es eine Reihe weitere Sätze intransitiver Würfel. Der Schönheitsfehler von Würfel B, dessen Wurf rasch langweilig wird, konnte beseitigt werden. Auch mit nur drei Würfeln läßt sich ein intransiver Satz erstellen. Als Fazit bleibt: Die Eigenschaft, der wahrscheinliche Gewinner eines Matches zu sein, muß nicht transitiv sein! Was bei „Stein, Schere, Papier“ willkürlich festgelegt wurde, kann auch mit solidem Regelwerk begründet werden.

3 Penney-Ante

Wo wir gerade bei intransitiven Paradoxa sind: Wie wäre es mit einem einfachen Münzwurf? Die Wahrscheinlichkeit p für Zahl, `Z`, sei dabei genauso hoch wie q, die Wahrscheinlichkeit für Kopf `K`: $p = q = \frac{1}{2}$. Es soll sich dabei um gleichermaßen *faire* wie *gedächtnislose* Münzen handeln. Der Ausgang eines Wurfes ist also nicht von den vorhergehenden Würfen beeinflußt.

Die Regeln des Spieles lauten: Spieler 1 sucht sich eine beliebige Reihe von Münzwürfen der Mindestlänge drei aus, beispielsweise `ZKK` oder `KKZK`. Spieler 2 wählt nun ebenfals eine Wurfreihe aus. Sodann wird die Münze so lange geworfen, bis die Reihe eines der beiden Spieler auftaucht. Wenn Spieler 2 alles richtig anstellt, so wird er *immer* eine Kombination finden, deren Gewinnwahrscheinlichkeit höher ist als die von Spieler 1. Für die genannten Beispiele wären das `ZZK` und `ZKKZ`. Wie kann und darf das sein? Die Wahrscheinlichkeiten sind doch $pqq = ppq = \frac{1}{8}$ bzw. $qqpq = pqqp = \frac{1}{16}$. Oder etwa nicht?

Die Taktik, mit der Walter Penney [6] den wahrscheinlichen Ausgang dieses Spieles zu seinen Gunsten beeinflußt, lautet wie folgt: hat Spieler 1 die folgende Münzreihe der Länge n gewählt

$$m_1 m_2 m_3 \ldots m_n, \quad (5)$$

so setzt Spieler 2 auf die Reihe:

$$\overline{m_2} m_1 m_2 \ldots m_{n-1}. \quad (6)$$

Entscheidend ist hierbei $\overline{m_2}$, welches das Gegenteil von m_2 darstellt: `K` anstatt `Z` und `Z` anstatt `K`. Spieler 2 wählt also für seine letzten $n-1$ Plätze genau die Werte, die Spieler 1 auf den ersten $n-1$ Plätzen hat. Der erste Wert von Spieler 2 ist die Negation des zweiten Wertes von Spieler 1: `K` anstatt `Z` bzw. `Z` anstatt `K`, wie auch in den oben genannten Beispielen geschehen.

Zum Verständnis dieses Sachverhaltes ist ein Zustandsdiagramm wie in Abb. 3 hilfreich. Spieler 1 setzt hier auf `ZKK`, Spieler 2 auf `ZZK`. Die Übergänge entsprechen jeweils dem Ausgang eines Münzwurfes, `K` oder `Z`. Wir beginnen im linken Zustand „Start“. Sobald das erste mal ein `Z` landet, entspricht das der Initialisierung beider Reihen (die jeweils mit `Z` beginnen), und der Zustand A wird erreicht. Je nach dem weiteren Verlauf der Münzwürfe wird früher oder später das Gewinnfeld für Spieler 1 oder Spieler 2 erreicht.

[3]* Mai 1938 in Minnesota, USA.

[4]Nach Maurits Cornelis Escher, * 17. Juni 1898 in Leeuwarden; NL; † 27. März 1972 in Hilversum, NL.

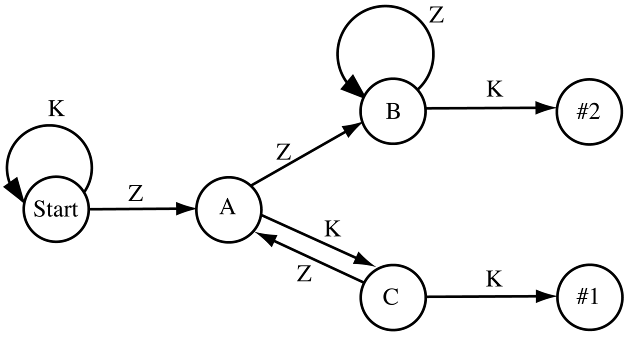

Abbildung 3: Zustandsdiagramm für Zahl-Kopf-Kopf (#1) gegen Zahl-Zahl-Kopf (#2)

Das Zustandsdiagramm erlaubt eine interessante Beobachtung. Mit Erreichen von Zustand B ist das Spiel so gut wie gelaufen, und Spieler 2 der designierte Gewinner. Es gibt nämlich keinen Weg, um von hier aus noch zum Zustand $\#1$ zu gelangen. Aus Zustand C heraus kann hingegen sehr wohl ein Pfad zurück in Richtung Zustand $\#2$ gefunden werden. Das gesamte Spiel wird also in Zustand A schon entschieden! Spieler 2 benötigt hier nur ein einziges Auftreten von `Z`, während Spieler 1 auf ein nur halb so wahrscheinliches `KK` hoffen muß.

Sicher ist es müßig, für jede einzelne Folge von Würfen ein derartiges Zustandsdiagramm zu erstellen. Es läßt sich herleiten, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit einer bestimmten Folge A im Vergleich zu einer anderen Folge B wie folgt berechnen läßt:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{B:B - B:A}{A:A - A:B}. \quad (7)$$

Dabei ist $V : W$ definiert als

$$V : W = \sum_{k=1}^{\min l,m} 2^{k-1} \nabla(V_{l-k-1:l} == W_{1:k}). \quad (8)$$

Der $\nabla\cdot$-Operator liefert hier eine eins zurück, falls sein Argument wahr ist, ansonsten eine null. $\nabla(V_{l-k-1:l} == W_{1:k})$ überprüft also, ob die letzten k Symbole von V den letzten k Symbolen von W entsprechen.

Mittlerweile ist dieses Phänomen auch für größere Alphabete, d.h. mehr als nur Kopf und Zahl, bewiesen werden. Ausführlichere Informationen hierzu finden sich in [3], als rasche Einführung leistet [1] gute Dienste.

Als Fazit bleibt zu sagen, dass ein auf den ersten Blick faires Spiel wie Penney-Ante sich bei näherer Betrachtung als ganz und gar nicht fair entpuppt.

4 Das Ziegenproblem

Eine in ihren Grundzügen seit dem späten 19. Jhdt. durch Joseph Bertrand[5] bekannt gewordene mathematische Problemstellung ist das *Ziegenproblem*. Ein größeres Publikuminteresse erlangte es 1990, nachdem Marilyn vos Savant in ihrer Kolumne im amerikanischen *Parade*-Magazin das Thema aufgriff. Auf diesen Artikel hin erhielt sie tausende von Leserbriefen, die ihre mathematischen Fähigkeiten anzweifelten - zu Unrecht, wie sie später belegen konnte. Immerhin hat gut die Hälfte der Leserbriefschreiber den Anstand gehabt, sich einsichtig zu zeigen und ein Entschuldigungsschreiben aufzusetzen. Teile aus diesen Schriftwechseln sind auf ihrer Webseite nachzulesen unter: http://www.marilynvossavant.com/articles/gameshow.html.

Worum es bei dem Ziegenproblem geht: Ein Kandidat wird in einem Quiz vor die Wahl zwischen den drei Türen A, B unc C gestellt. Eine der Türen führt zum Hauptgewinn, hinter den anderen beiden Türen verbirgt sich eine Ziege, mithin also eine Niete. Der Kandidat darf sich für eine der drei Türen entscheiden. Diese Tür bleibt jedoch vorerst verschlossen. Stattdessen wird eine der beiden anderen Türen vom Quizleiter geöffnet und eine der Nieten gezeigt. Nun darf der Kandidat entscheiden, ob er bei seiner Wahl bleibt, oder die Tür wechseln möchte.

Intuitiv antworten die meisten Leute, dass es doch egal sei, ob man wechselt oder nicht. Schließlich ist es doch jetzt eine 50:50 Chance, ob man vorher die Tür mit der Ziege oder dem Hauptgewinn erwischt hat. Ob Wechsel oder nicht, was kann das jetzt für einen Unterschied machen?

Es macht einen Unterschied - und zwar verdoppelt sich die Gewinnchance nach einem Wechsel! Wie kommt es dazu? Angenommen, der Kandidat hat anfangs auf die richtige Tür A gesetzt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür liegt bei $\frac{1}{3}$. Nun entfernt der Moderator eine der beiden Nieten. Ein Kandidat, der die Wechsel-Taktik spielt, wird jetzt zur verbleibenden Niete wechseln, und damit leer ausgehen. Der wechselunwillige Kandidat gewinnt hier.

Nun nehmen wir an, der Kandidat hat zu Anfang eine der beiden Nieten-Türen gewählt. Das wird in $\frac{2}{3}$ aller Fälle eintreffen. Die verbleibende Nieten-Tür wird anschließend vom Moderator aus dem Spiel genommen (den Gewinn darf der Moderator ja nicht entfernen). Mit der Wechsel-Taktik landet der Kandidat nun bei der Tür mit dem Hauptgewinn, während der wechselunwillige Kandidat auf seiner Ziege sitzen bleibt. In Abb. 4 ist diese Situation dargestellt.

Es zeigt sich also, dass der Wechsel-Kandidat eine doppelt so hohe Gewinnwahrscheinlichkeit erreicht! Man kann die Begründung auch anders angehen: Es ist wahrscheinlicher, anfangs auf eine Ziegen-Tür anstatt auf den Gewinn zu tippen. Jedoch muß der Moderator danach die verbleibende

[5] * 11. März 1822 in Paris, FR; † 5. April 1900 in Paris, FR

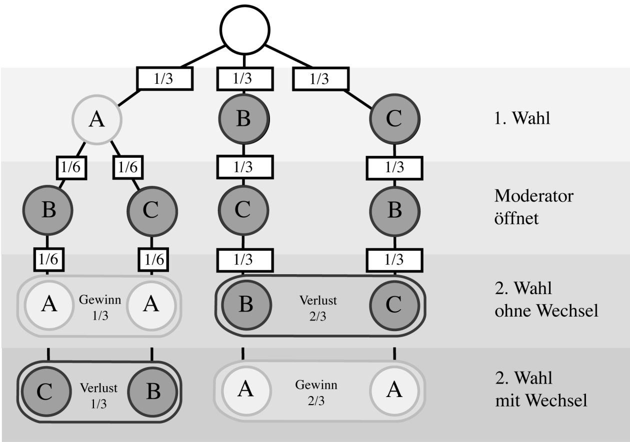

Abbildung 4: Entscheidungsbaum für das Ziegenproblem

Ziegen-Tür entfernen, so dass hinter der noch im Spiel befindlichen und in der ersten Runde ungetippten Tür der Gewinn verbleibt.

5 Das Triell

Eine etwas paradoxe Situation kann bei einem *Triell* entstehen. Die erste bekannte Erwähnung dieses Phänomens fand 1938 in [7] statt, größere Bekanntheit erlangte es u.a. mit [2] 1959 sowie unlängst durch eine Erwähnung in [8].

Die Regeln eines Trielles sind schnell erklärt: Drei Schützen, jeder mit einer gewissen Trefferwahrscheinlichkeit, schießen nacheinander so lange aufeinander, bis nur noch einer lebt. Aus Gründen der Fairness darf der schlechteste Schütze anfangen, als zweites schießt der zweitschlechteste, und als letztes der beste, wenn er dann noch lebt. Nennen wir unsere Schützen Anton, Bernd und Claas. Die Trefferwahrscheinlichkeit für Claas liegt bei $p_C = \frac{1}{3}$, Bernd trifft in zwei von drei Fällen ($p_B = \frac{2}{3}$), und Anton ist der perfekte Schütze: $p_A = 1$. Wie soll man sich nun verhalten, wenn man dummerweise die Rolle des Claas einnehmen darf?

Intuitiv mag man versucht sein, Anton ins Visier zu nehmen. Schließlich stellt er ja irgendwie die größte Gefahr dar. Oder doch auf Bernd anlegen? Immerhin ist er direkt der nächste nach Claas.

Sehen wir uns die Optionen etwas genauer an. Wenn wir mit Erfolg auf Bernd schießen, dann hat Anton nur noch uns als Ziel. Bei seiner einhundertprozentigen Trefferwahrscheinlichkeit keine sehr gute Idee. Entscheiden wir uns dagegen auf Anton anzulegen und treffen, so ist unmittelbar nach uns Bernd dran. Auch er hat dann nur noch uns als Ziel, und in 67% der Fälle wären wir erledigt.

Der Ausweg aus diesem Dilemma, so überraschend es erscheint: Wir schießen in die Luft! Bernd wird dann auf Anton anlegen. Sollte Bernd treffen, wären wir wieder dran, und hätten nur noch Bernd als Gegner. Verfehlt Bernd sein Ziel, so wird Anton Bernd als größte Gefahr identifizieren und ausschalten. Auch danach wären wir an der Reihe, und haben immerhin eine Chance, Anton auszuschalten. Egal, welcher der beiden anderen Spieler treffen mag, am Anfang der zweiten Runde steht uns nur noch ein einziger Gegner gegenüber. Das Triell kann somit in ein Duell verwandelt werden, mit erheblich besseren Aussichten für uns, da wir wieder den ersten Schuss in diesem Duell haben!

Der erwähnte Sachverhalt hält auch einer genaueren mathematischen Untersuchung stand. Durch die Taktik des ersten Schusses in die Luft kann Claas eine durchschnittliche Überlebenswahrscheinlichkeit von knapp 40% erreichen. Beispiele dafür finden sich in [4] und [5]. Werden allerdings die Parameter variiert, also die Trefferwahrscheinlichkeiten der Schützen verändert, so kann sich auch die optimale Strategie ändern. Der Schuss in die Luft muß dann nicht der Königsweg sein.

Als Fazit bleibt: So manches Mal kann purer Aktionismus (in diesem Falle einfach drauf loszuschießen) doch die schlechtere Wahl gegenüber einem gelassenen Aussitzen der Situation sein.

Literatur

[1] Andrews, M. W.: *Anyone for a Nontransitive Paradox? The Case of Penney-Ante*, 2004

[2] Gardner, M.: *Mathematical Puzzles and Diversions*, Penguin Books Ltd, Harmondsworth, England, 1959

[3] Graham, R. L., Knuth, D., Patashnik, O.: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1994

[4] Kilgour, D. M.: *The Sequential Truel*, International Journal of Game Theory, Volume 4, Number 3, Physica / Springer Verlag, 1975

[5] Kilgour, D. M., Brams, S. J.: *The Truel*, Mathematics Magazine 70, 5, S. 315-326, 1997, http://www.econ.nyu.edu/cvstarr/working/1997/RR97-05.PDF

[6] Penney, W: *Problem 95: Penney-Ante*, Journal of Recreational Math. 7 (1974), S. 321.

[7] Phillips, H.: *Question time; an omnibus of problems for a brainy day*, Farrar & Rinehart, LCCN 38-005540, New York, 193

[8] Singh, S.: *Fermats letzter Satz*, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 7. Aufl. 2002